

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МЭИ»

О.А. АМОСОВА, А.Е. ВЕСТФАЛЬСКИЙ, Г.В. КРУПИН

**УПРАЖНЕНИЯ
ПО ОСНОВАМ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ**

Методическое пособие по численным методам
для студентов всех направлений подготовки
НИУ «МЭИ»

2016

Издательство МЭИ

Москва

УДК 519

А-625

Утверждено учебным управлением НИУ «МЭИ»

Подготовлено на кафедре математического моделирования

Рецензент: д. ф.-м. н. А.А. Амосов

Амосова О.А., Вестфальский А.Е., Крупин Г.В.

Упражнения по основам численных методов / О.А. Амосова, А.Е. Вестфальский, Г.В. Крупин — М.: Издательство МЭИ, 2016. — 32 с.

Пособие содержит набор задач по методам вычислительной математики качественного и расчетно-числового характера, предназначенных для самостоятельной работы обучающихся, и охватывающих все основные разделы дисциплины.

Для студентов всех направлений подготовки НИУ «МЭИ».

Учебное издание

Амосова Ольга Алексеевна

Вестфальский Алексей Евгеньевич

Крупин Григорий Владимирович

УПРАЖНЕНИЯ ПО ОСНОВАМ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Методическое пособие

по курсам численных методов и вычислительной математики
для студентов всех направлений подготовки НИУ «МЭИ»

Редактор издательства

Темплан издания МЭИ 2016, учебн.

Печать офсетная

Тираж 150 экз.

Формат 60 × 84/16

Изд. №

Подписано в печать

Физ. печ. л 2

Заказ

Издательство МЭИ, 111250, Москва, Красноказарменная ул., д. 14

Отпечатано в типографии Издательства МЭИ,

111250, г. Москва, Красноказарменная ул., д. 13

© Национальный исследовательский
университет «МЭИ», 2016

Предисловие

В новых образовательных стандартах значительная часть учебных часов отводится на самостоятельную работу студентов. Это означает, что методическое обеспечение дисциплины должно включать в себя литературу соответствующего содержания. Теоретические разделы вычислительных методов достаточно полно изложены в учебнике [1], но практически отсутствуют задачки адекватного уровня для внеаудиторной работы. Особенно это касается вопросов практического применения изучаемых методов, а также упражнений расчетного характера. Простейшие задачи, как правило, выдаются студентам в виде обязательных расчетных заданий (типовых расчетов), выполнение которых свидетельствует об освоении предмета на начальном уровне. Однако на зачетах и экзаменах от студентов требуется более глубокое освоение материала.

Настоящее пособие частично заполняет этот пробел. Оно охватывает все разделы вычислительных методов (за исключением численного решения уравнений в частных производных), читаемые для студентов различных направлений подготовки МЭИ преподавателями кафедры ММ, и включает в себя не только упражнения, требующие решения в числах, но также вопросы качественного характера.

Пособие можно рассматривать как сборник заданий для домашней работы студентов, заданий для обсуждения на семинарских занятиях, заданий для защиты лабораторных работ.

Другая цель пособия – помочь обучающимся структурировать материал и глубже понять его, а именно: подчеркнуть некоторые важные моменты теоретической основы изучаемых численных методов; обратить внимание на особенности построения и реализации методов, на их сравнительные характеристики; показать интересные задачи, на которых можно демонстрировать тонкости работы методов. Материал отдельной темы можно использовать для подготовки к защитах тематических лабораторных работ и к другим контрольным мероприятиям.

В методическом плане (обозначения, терминология, порядок подачи материала и т.д.) данное пособие привязано к учебнику [1], и пособиям [2 – 4], в которых можно найти подробные примеры решения типовых задач.

Основы теории погрешности

Материал по данной теме содержится в [1, глава 2, глава 3]. Примеры решения задач можно найти в [2].

1. Для чего требуется два разных способа определения погрешности (абсолютная и относительная)?
2. Пусть некоторая приближенная величина измеряется, например, в Джоулях. В чем будут измеряться ее абсолютная и относительная погрешности?
3. Объясните различие между округлением по дополнению и округлением усечением.
4. Чем верная цифра отличается от значащей?
5. Для чего используется понятие верной цифры?
6. Могут ли некоторые цифры приближенного значения быть верными, но не совпадать с соответствующими цифрами точного значения? Могут ли все верные цифры приближенного значения не совпадать с соответствующими цифрами точного?
7. Может ли погрешность функции оказаться меньше погрешности ее аргументов?
8. Приведите геометрическую иллюстрацию формулы погрешности вычисления функций одной переменной.
9. Может ли одна и та же функция быть хорошо обусловлена в одном диапазоне изменения аргумента и плохо обусловленной в другом?
10. Может ли одна и та же функция быть хорошо обусловленной с точки зрения абсолютной погрешности и плохо – с точки зрения относительной (в одном и том же диапазоне изменения аргумента)?
11. Можно ли точно представить в ЭВМ число «е»?

* * *

12. Следующие числа заданы приближенно:

$$\begin{array}{lll} a = 255.651, \Delta a = 2.1, & b = 0.9386, \Delta b = 0.02, \\ c = -5.1486, \Delta c = 0.06, & d = 1986, \Delta d = 14, \\ f = 300, \Delta f = 0.002, & k = 777.77, \Delta k = 9.9. \end{array}$$

Запишите эти числа в трех формах записи: с использованием значения абсолютной погрешности, с использованием значения относительной погрешности и со всеми верными цифрами.

13. Приближенное число a содержит 5 верных цифр. Что можно сказать об относительной погрешности числа a ?

14. С какой относительной погрешностью нужно найти приближенное значение числа a , чтобы верными оказались 5 значащих цифр?
15. Для приближенных чисел a и b ($a > b > 0$) известно, что $\delta a = \delta b = \delta$. Оцените погрешности
- a) $\delta(a+b)$, b) $\delta(a-b)$, c) $\delta(a \cdot b)$, d) $\delta(a/b)$,
e) $\delta(\sqrt{a \cdot b})$, f) $\delta(\sqrt{a/b})$, g) $\delta(a^2 \cdot b^5)$, h) $\delta(a+b)^2$.
16. Числа a и b заданы приближенно: $a=1.137$, $b=1.073$, $\Delta a = \Delta b = 0.011$. Оцените погрешности
- a) $\Delta(a-b)$, b) $\Delta(a \cdot b)$, c) $\Delta(a^2 - 3b)$ d) $\Delta\sqrt{a-b}$.
- Запишите результаты с учетом всех верных цифр.
17. Определите, какое из равенств более точное:
- a) $\sqrt{10.5}=3.24$ или $\sqrt{30}=5.47$;
b) $\frac{12}{11}=1.091$ или $\frac{23}{15}=1.533$;
c) $\sqrt{10.5}=3.24$ или $\frac{4}{17}=0.235$?
18. Укажите правила оценки абсолютных и относительных погрешностей функций
- a) $y(x)=x^a$, b) $y(x)=a^x$ ($a>0$), c) $y(x)=e^x$.
19. Найдите абсолютную и относительную погрешности вычисления значения выражения $\frac{x_1 - 2x_2}{x_3}$, если $x_1 = 2.5 \pm 0.1$, $x_2 = 2.0 \pm 0.2$, $x_3 = 1.7 \pm 0.3$.
20. Функция $f(x, y, z) = 2x - 2y + 5z$ вычисляется в точке $(x^*, y^*, z^*) = (1, 4, 5)$, причем абсолютная погрешность каждого аргумента составляет 0.04. Найдите величину погрешности $\Delta(f^*)$.
21. Найдите абсолютную погрешность функции $f(x, y, t) = \ln x \cdot \sin(y+t)$, если $x = 3.25 \pm 0.05$, $y = 2.0 \pm 0.1$, $t = 1.684 \pm 0.002$.

22. Найдите абсолютную погрешность функции $f(x, y, t) = (\sin x + \cos y)e^{-t}$, если $x=1.57 \pm 0.03$, $y=0.01 \pm 0.01$, $t=0.5 \pm 0.1$.
23. Найдите абсолютную погрешность функции $f(x, y, t) = \sin^2(x \cdot y) \cdot \cos t$, если $x=3.14 \pm 0.01$, $y=1.00 \pm 0.05$, $t=3.1 \pm 0.1$.
24. Функция $f(x, y, z) = 10x^3 y^2 z$ вычисляется в точке $(x^*, y^*, z^*) = (2, 1, 3)$, причем погрешность каждого аргумента составляет 1%. Найдите величину погрешности $\delta(f^*)$.
25. Коэффициенты a, b, c вычислены с относительной погрешностью $\delta a = \delta b = \delta c = \delta$. Найдите максимальную погрешность, с которой могут вычисляться корни уравнений
- а) $ax^2 + c = 0$, б) $ax^2 + bx = 0$.
26. Функция $y(x_1, x_2, x_3) = \frac{2x_1 + x_2}{x_3}$ вычисляется при значениях $x_1 \approx 2.7$, $x_2 \approx -3.1$, $x_3 \approx 1.8$. Определите, при каких значениях $\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3$ ответ будет содержать 3 верные цифры.
27. Корни уравнения $x^2 - 2x + \lg 2 = 0$ нужно получить с четырьмя верными цифрами. С каким количеством верных цифр нужно взять свободный член уравнения?
28. Чему равно абсолютное число обусловленности задачи вычисления функции $y(x) = \sqrt{x}$, если аргумент $x \in [1, 10]$?
29. Чему равно относительное число обусловленности задачи вычисления функции $y(x) = \sqrt{x}$, если аргумент $x \in [1, 10]$?
30. Для приближенного вычисления величины $\sqrt{1+x}$ можно в некоторых случаях использовать приближенную формулу $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$. Выясните, при каких значениях x , эта формула будет давать погрешность не более 1%?
31. В уравнении $e^{2.5^* x} = 4$ коэффициент, отмеченный знаком $(*)$, получен в результате округления усечением. Остальные

коэффициенты заданы точно. Оцените абсолютную погрешность решения уравнения.

32. В уравнении $\sqrt[3]{1.5x}=3^*$ коэффициент, отмеченный знаком $(*)$, получен в результате округления дополнением. Остальные коэффициенты заданы точно. Оцените абсолютную погрешность решения уравнения.
33. До скольких значащих цифр следует округлить значение числа π , чтобы погрешность вычисления величины $3\pi - \pi^2$ не превосходила 0.01%? Проверьте полученный результат непосредственным вычислением.
34. Дано число 0.008846. Чему равна относительная погрешность представления этого числа в 4-х разрядной ячейке памяти (разряды – десятичные, округление по дополнению)?
35. Дано число 0.00254958. Чему равна относительная погрешность представления этого числа в 3-х разрядной памяти (разряды – десятичные, округление по дополнению)?
36. Пусть для хранения мантииссы вещественного числа отводится 10 двоичных разрядов, а для порядка – 6 разрядов. Найдите машинные константы, соответствующие такому представлению чисел.
37. Пусть для некоторой ЭВМ известны x_∞ (машинная бесконечность), x_0 (машинный ноль) и ε_M (машинный эпсилон). Что можно сказать о результатах выполнения следующих операций на этой ЭВМ?
 - a) $x_0 \cdot x_\infty$, b) $x_\infty + x_0$, c) $x_\infty - x_0$,
 - d) $x_0 + \varepsilon_M$, e) $x_\infty + \varepsilon_M$, e) $x_\infty - \varepsilon_M$.
38. Можно ли ожидать верный результат, если использовать для поиска машинного эпсилон алгоритм
 - a) $1+3^{-k}$, b) $10+2^{-k}$?
39. Сравните x_0 (машинный ноль) и ε_M (машинный эпсилон).
40. Возможна ли ЭВМ, для которой
 - a) $x_0 < \varepsilon_M$, b) $x_0 > \varepsilon_M$?
41. С какой погрешностью будет вычислена длина окружности радиуса $R=1$ (известного точно) на ЭВМ с машинным эпсилон $\varepsilon_M = 10^{-6}$?

Решение нелинейных уравнений

Материал по данной теме содержится в [1, глава 4]. Примеры решения задач можно найти в [2].

1. Любые ли корни можно локализовать при помощи табулирования функции? Приведите пример уравнения, корни которого не локализуются указанным способом.
2. Чем сходящийся итерационный процесс отличается от расходящегося?
3. Можно ли бесконечно улучшать качество приближения (повышать точность), реализуя на ЭВМ итерационный метод?
4. Как выглядит априорная и как – апостериорная оценки погрешности метода бисекции?
5. Почему для метода простой итерации приходится выводить две разные оценки погрешности?
6. Может ли метод простой итерации сходиться к числу, не являющемуся корнем решаемого уравнения?
7. Может ли метод простой итерации сходиться медленнее метода бисекции?
8. Может ли метод Ньютона сходиться медленнее метода бисекции?
9. Каковы основные достоинства и недостатки метода Ньютона?
10. Какие дополнительные сложности возникают при использовании многошаговых методов.
11. В чем различие между глобально и локально сходящимися методами?
12. Рассмотрим два нелинейных уравнения: $x^2 = 0$ и $x^3 = 0$. Можно ли применить к поиску приближенного решения каждого из уравнений метод бисекции? Ответ обоснуйте (если нельзя – почему, если можно – какая ожидается скорость сходимости).
13. Можно ли применять классический метод Ньютона к поиску кратных корней нелинейных уравнений? Ответ обоснуйте (если нельзя – почему, если можно – какая ожидается скорость сходимости).
14. Можно ли построить итерационный метод поиска простого корня нелинейного уравнения, который был бы одношаговым, не требовал вычисления производной и имел квадратичную скорость сходимости?

* * *

15. Определите количество корней уравнения и для каждого корня найдите отрезки локализации:
- a) $\sin x - (x - \pi)^3 = 0$; b) $\sin x - x^3 = 0$;
 c) $\sqrt{x} + \sqrt{x+4} = 2$; d) $x^3 + 2x - 6 = 0$.
16. Найдите вещественный корень уравнения $x^3 + 3x - 5 = 0$ методом бисекции с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$.
17. Определите количество корней уравнения $\cos(x) - x^4 = 0$ и локализируйте их. Для положительного корня запишите расчетные формулы метода простой итерации, обеспечив выполнение достаточного условия сходимости. Укажите начальное приближение и критерий окончания итераций.
18. Уравнение $\cos x - x^2 + 2x - 1 = 0$ имеет два корня: $x_1 = 0$ и $x_2 \approx 1.5$. Для уточнения корней применяется метод простой итерации $x_{n+1} = \frac{1}{2}(1 + x_n^2 - \cos x_n)$. К какому корню сойдется процесс? Предложите итерационный процесс для уточнения второго корня.
19. Пусть решается уравнение $x - \ln x - 3 = 0$. Определите, какие из итерационных процессов сходятся к корню $\bar{x} \approx 4.5$. Выберите из них наилучший.
- a) $x_{n+1} = \ln x_n + 3$, b) $x_{n+1} = e^{x_n - 3}$, c) $x_{n+1} = 2x_n - \ln x_n - 3$.
20. Можно ли гарантировать сходимость итерационного процесса $x_{n+1} = x_n^2 + 3\sin(x_n)$, примененного для поиска корня уравнения $x^2 + 3\sin(x) - x = 0$ к корню, расположенному на отрезке $[-2, -1]$?
21. Уравнение $x^3 + 1 - 10x = 0$ имеет корень на отрезке $[3, 4]$. При каких значениях параметра α сходится итерационный процесс $x_{n+1} = x_n - \alpha(x_n^3 + 1 - 10x_n)$?
22. Определите, сходится ли итерационный процесс и к какому значению.
- a) $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 3$; b) $x_{n+1} = \frac{3}{2}x_n - 1$; c) $x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n + 2)$.

23. Определите количество итераций, достаточное для нахождения корня функции $f(x) = xe^x - x^3 - 1$, принадлежащего отрезку $[0, 2]$, методом бисекции с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$.
24. Можно ли применять метод простой итерации с выбором оптимального параметра для поиска кратных корней?
25. Пусть для нахождения корня функции построен метод простой итерации со знаменателем $q=0.25$. Определите, во сколько раз больше (или меньше) итераций потребуется такому методу по сравнению с методом бисекции для поиска корня с точностью $\varepsilon = 10^{-10}$.
26. Можно ли указать количество итераций, достаточное для поиска корня уравнения $ax+b=0$ ($a \neq 0$) методом простой итерации с выбором оптимального параметра?
27. Можно ли указать количество итераций, достаточное для поиска корня уравнения $ax+b=0$ ($a \neq 0$) методом Ньютона?
28. Постройте итерационный процесс Ньютона для вычисления числа $\sqrt[m]{a}$ ($a > 0$, m – натуральное число), в котором использовались бы только арифметические операции.
29. Определите, при каких начальных приближениях сходится метод Ньютона, примененный для решения уравнения $\ln x = 0$.
30. Докажите, что метод Ньютона, примененный для решения уравнения $ax^m = 0$ (где m – натуральное число, $a \neq 0$), сходится при любом начальном приближении.
31. Как будет вести себя следующий метод при попытке применить его для поиска корня уравнения $|x - a| = 0$?
 - а) метод Ньютона, б) метод секущих,
 - с) метод ложного положения, д) метод бисекции.
32. Запишите расчетные формулы итерационного метода решения нелинейного уравнения $(2x - x^2 - 1)^2 = 0$, сходящегося квадратично к корню $\bar{x} = 1$.
33. Определите радиус $\bar{\varepsilon}$ интервала неопределенности каждого корня функции $f(x) = 1 - x^2$, если известно, что в любой точке отрезков локализации корня функция вычисляется с абсолютной погрешностью $\Delta f \leq \Delta_0$.

Решение систем линейных алгебраических уравнений

Материал по данной теме содержится в [1, глава 5, глава 6]. Примеры решения задач можно найти в [2].

1. Какие уравнения называются алгебраическими?
2. Может ли система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) иметь несколько различных решений?
3. Есть ли аналог отрезка локализации корней для задачи решения СЛАУ?
4. Как выразить одним числом погрешность вектора (или матрицы)?
5. Когда СЛАУ считается хорошо обусловленной?
6. Может ли погрешность решения СЛАУ оказаться меньше погрешности правых частей?
7. В чем заключается различие между прямыми и итерационными методами решения СЛАУ?
8. В каких единицах измеряется трудоемкость методов решения СЛАУ?
9. Верно ли, что прямой метод дает точное значение решения, а итерационный – только приближенное?
10. Верно ли, что итерационным методом можно получить решение со сколь угодно большой точностью?
11. Чем сходящийся итерационный метод отличается от расходящегося?
12. Какие выводы необходимо делать из априорной оценки погрешности, а какие – из апостериорной?
13. Пусть требуется решить несколько систем с одной и той же матрицей, но разными правыми частями. Можно ли уменьшить количество вычислений при использовании метода Гаусса?
14. Существуют ли матрицы, системы с которыми невозможно решить методом Гаусса без выбора главного элемента?
15. Какую проблему и как решают модификации метода Гаусса? Проиллюстрируйте ответ на примере схемы частичного выбора ведущего элемента.
16. Какие преимущества имеет схема частичного выбора (метода Гаусса) по сравнению со схемой полного выбора с точки зрения ее реализации на практике?
17. Почему не следует решать СЛАУ по правилу Крамера?
18. Верно ли, что метод Зейделя является улучшением метода Якоби и, следовательно, всегда сходится быстрее?

19. Пусть в системе, приведенной к виду $x = Bx + c$, матрица B такова, что $\|B\|_1 = 0.85$, $\|B\|_\infty = 1.1$. Будет ли сходиться метод простой итерации?
20. Будет ли сходиться метод Зейделя для системы из предыдущей задачи?
21. Приведите пример СЛАУ $[4 \times 4]$, для которой выполнены условия применимости метода прогонки (и покажите это). Что может произойти в процессе вычислений при невыполнении этих условий?
22. Выведите полный набор формул разложения Холецкого матрицы $[3 \times 3]$.
23. Привести пример СЛАУ $[3 \times 3]$, для которой выполнены условия применимости метода Холецкого (и покажите это).
24. Что можно утверждать о фактической сходимости метода Зейделя при невыполнении достаточных условий его сходимости?

* * *

25. Вычислите нормы векторов

$$\text{a) } \|a\|_1, \quad a = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } \|a\|_2, \quad a = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \text{c) } \|a\|_\infty, \quad a = \begin{pmatrix} -13 \\ 7 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

26. Вычислите нормы матриц

$$\text{a) } \|A\|_1, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 9 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } \|A\|_2, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{c) } \|A\|_\infty, \text{ где } A = \begin{pmatrix} 7 & -7 & 6 \\ 10 & 11 & -4 \\ 3 & -20 & 40 \end{pmatrix}.$$

27. Изобразите единичные "шары" $\{x \in R^2 \mid \|x\|_2 \leq 1\}$, $\{x \in R^2 \mid \|x\|_1 \leq 1\}$ и $\{x \in R^2 \mid \|x\|_\infty \leq 1\}$.
28. Оцените количество верных значащих цифр в решении системы линейных алгебраических уравнений, если матрица системы A

задана точно, элементы вектора правых частей заданы с тремя верными значащими цифрами, а $\text{cond}(A) = 10^3$.

29. С какой относительной погрешностью в норме $\|\cdot\|_1$ будет найдено

решение системы $\begin{cases} 4^* x_1 + 5x_2 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 = 2.5 \end{cases}$, если коэффициент матрицы, отмеченный знаком $^{(*)}$, получен в результате округления по дополнению, а все остальные коэффициенты и правые части заданы точно?

30. С какой относительной погрешностью в норме $\|\cdot\|_\infty$ будет

найдено решение системы $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 = 1.2^* \\ 7x_1 + 6x_2 = 1.3 \end{cases}$, если матрица задана точно, а коэффициент вектора правых частей, отмеченный знаком $^{(*)}$, получен в результате округления усечением?

31. Решите методом Гаусса систему.

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 2; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_2 + 3x_3 = 1. \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

32. Решите методом прогонки систему.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5; \\ x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 3; \\ x_3 + x_4 = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5 \\ x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 12. \\ x_3 + 2x_4 = 4 \end{cases}$$

33. Решите систему $Ax=b$ методом Гаусса (схема единственного деления):

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 23 \\ 2 \\ 31 \end{pmatrix}.$$

34. Пользуясь результатом решения предыдущей задачи, запишите LU -разложение матрицы A . С его помощью найдите решение системы:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 16 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

35. Решить систему $Ax=b$ методом Гаусса (схема частичного выбора).

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 9 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 23 \\ -6 \\ 28 \end{pmatrix}.$$

36. Решите систему $Ax=b$ из предыдущей задачи методом Гаусса (схема полного выбора).

37. Решите систему $Ax=b$ методом Холецкого.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 10 & 6 \\ 6 & 6 & 46 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 22 \\ 44 \\ 116 \end{pmatrix}.$$

38. Приведите систему к виду, удобному для итераций по методу Якоби и определите количество итераций, требуемых для достижения точности $\varepsilon=10^{-3}$

$$\text{a) } \begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 12 \\ 2x_1 + 10x_2 + x_3 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + 10x_3 = 14 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 0.9x_1 + 1.1x_2 + 0.4x_3 = 0.9 \\ 0.5x_1 - 0.3x_2 + 0.4x_3 = -1.5 \\ 4.1x_1 + 5.8x_2 - 1.7x_3 = 9.2 \end{cases}$$

39. Приведите систему уравнений $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 14 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 = -4.1 \\ 2x_1 - 20x_2 - x_3 = -24.2 \end{cases}$ к виду,

удобному для итераций по методу Зейделя. Проверьте условие сходимости.

40. Пусть система уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = -3 \end{cases}$ решается методом

Зейделя с начальным приближением $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$. Какова относительная

погрешность решения после двух шагов метода?

41. Выполните 2 шага метода Якоби для решения системы уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = -3 \end{cases}$. Оцените погрешность найденного приближенного решения, пользуясь апостериорной оценкой.

42. Покажите, что если A – нижняя треугольная матрица с ненулевыми диагональными элементами, то метод Зейделя сходится за одну итерацию.

43. Покажите, что если A – диагональная матрица с ненулевыми диагональными элементами, то метод Якоби и метод Зейделя сходятся за одну итерацию.

44. Пусть A – верхняя треугольная матрица, с ненулевыми диагональными элементами. Докажите, что метод Зейделя сходится за конечное число итераций и выясните, за какое.

45. Изобразите геометрически поведение приближений по методу Зейделя для следующих систем и сделайте вывод о сходимости/расходимости метода.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = -3 \end{cases}; & \text{b) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 = -3 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \end{cases}; \\ \text{c) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = -3 \end{cases}; & \text{d) } \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}. \end{array}$$

Зависит ли результат от выбора начального приближения?

46. Рассмотрите систему уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = -3 \end{cases}$. Изобразите геометрически поведение приближений по методу релаксации при значении параметра

$$\text{a) } \omega = 0.25; \quad \text{b) } \omega = 1.5.$$

47. Покажите, что достаточное условие сходимости $\|B\|_{\infty} < 1$ метода простой итерации (Якоби) эквивалентно условию строчного диагонального преобладания матрицы A .

48. Какому итерационному методу – Якоби или Зейделя – потребуется меньшее количество итераций для достижения одной и той же точности, если матрица системы $Ax = b$ равна

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 \\ 0.2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0.4 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{c) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приближение функций

Материал по данной теме содержится в [1, глава 11]. Примеры решения задач можно найти в [3].

1. Многочленами какой степени можно приближать функции по методу наименьших квадратов (МНК)?
2. Может ли нормальная система МНК не иметь решений?
3. Имеет ли среднеквадратичное отклонение геометрический смысл?
4. Как узнать, является ли выбранный наугад многочлен интерполяционным для имеющейся табличной функции?
5. Чему равно среднеквадратичное отклонение интерполяционного многочлена?
6. Многочленами какой степени можно интерполировать таблично заданные функции?
7. Что общего и в чем различие между интерполяцией и приближением в смысле наименьших квадратов?
8. Какими соображениями следует руководствоваться при выборе между интерполяцией и МНК?
9. Пусть функция изменила свои значения во всех четных узлах. Значение какого интерполяционного многочлена (Лагранжа или Ньютона) в заданной точке быстрее пересчитать?
10. Пусть в таблицу значений функции добавлен еще один узел. Значение какого интерполяционного многочлена (Лагранжа или Ньютона) в заданной точке быстрее пересчитать?
11. Пусть узлы интерполяции расположены равномерно. Какой из многочленов (Лагранжа или Ньютона) будет интерполировать функцию более точно?
12. Существуют ли функции, которые можно проинтерполировать без погрешности?
13. Приводит ли увеличение количества узлов интерполяции на заданном отрезке к увеличению точности интерполяции?
14. Имеет ли какие-либо преимущества интерполяционный многочлен в форме Ньютона перед интерполяционным многочленом в форме Лагранжа. Проиллюстрируйте примером.
15. Что будет представлять собой многочлен наилучшего среднеквадратичного приближения, если его степень будет на единицу меньше количества точек (при отсутствии вычислительной погрешности)?

* * *

16. Функция задана таблицей значений $\begin{array}{c|c|c|c|c} x & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 1.8 & 2.4 & 2.2 & 2 \end{array}$.

Постройте многочлены нулевой, первой и второй степеней, приближающие функцию по методу наименьших квадратов. Сравните качество приближения. Постройте графики функции и найденных многочленов.

17. Используя метод наименьших квадратов, аппроксимируйте таблично заданную функцию

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y	0.3	0.4	0.5	0.3	0.4	0.6	0.5	0.3	0.4	0.5	0.4

константой (функцией вида $\Phi(x) = a$). Найдите среднеквадратичное отклонение.

18. Составьте нормальную систему метода наименьших квадратов для определения коэффициентов a, b, \dots следующих функций.

- а) $\Phi(x) = a + bx^2$; б) $\Phi(x) = a - bx^2$;
 в) $\Phi(x) = ax + \frac{b}{x}$; г) $\Phi(x) = a + b \sin x + c \cos x$;
 д) $\Phi(x) = ae^x + be^{2x}$; е) $\Phi(x) = ax + bx^2 + cx^3$.

19. Используя метод наименьших квадратов, аппроксимируйте на отрезке $[0, \pi]$ функцию $y = \sin x$ константой по таблице из 5

точек, расположенных равномерно с шагом $h = \frac{\pi}{4}$. Найдите

среднеквадратичное отклонение.

20. Решите предыдущую задачу, используя равномерную таблицу из 3, а затем из 10 точек. Сравните результаты.

21. Известно, что функция, заданная таблицей

x	1	2	3	4
y	100	30	12	5

имеет вид $\Phi(x) = \frac{a}{x^2}$. Найдите

значение коэффициента, используя метод наименьших квадратов.

22. Известно, что функция, заданная таблицей

x	1	1.5	2	3.5
y	1	2	4.5	12.5

имеет вид $\Phi(x) = a + b2^x$. Найдите

значения коэффициентов, используя метод наименьших квадратов.

23. Аппроксимируйте табличную функцию из предыдущей задачи зависимостью вида $\Phi(x) = a + be^x$. Определите, какой из двух данных зависимостей больше соответствует таблица значений.

24. Функция задана таблицей значений $y_i = x_i = \frac{i}{4}$, $i = 0 \dots 100$.

Аппроксимируйте ее многочленами 0-й, 1-й и 2-й степеней, используя метод наименьших квадратов.

25. Пусть таблица значений, задающая функцию $y = f(x)$ такова, что $y_i = x_i^2$ ($i = \overline{0, n}$). Докажите, что в этом случае многочлен, построенный по методу наименьших квадратов, будет иметь вид $\Phi_m(x) = x^2$ при любом значении $n \geq 2$.

26. Постройте интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона и по заданной таблице значений функции.

a) $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline y & 2 & 0 \end{array}$; b) $\begin{array}{c|c|c} x & 2 & 3 \\ \hline y & 1 & 2 \end{array}$; c) $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 4 \\ \hline y & 2 & 0 \end{array}$.

27. Постройте интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона по заданной таблице значений функции.

a) $\begin{array}{c|c|c|c} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & 3 & 3 & 1 \end{array}$; b) $\begin{array}{c|c|c|c} x & 0 & 1 & 4 \\ \hline y & 3 & 1 & 1 \end{array}$; c) $\begin{array}{c|c|c|c|c} x & 0 & 1.5 & 2 & 2.5 \\ \hline y & 2 & 0 & 1 & 3 \end{array}$.

28. Функция задана таблицей $\begin{array}{c|c|c|c} x & -2 & 0 & 2 \\ \hline y & 1 & -3 & 4 \end{array}$. Найдите

приблизленно ее значение в точках $\tilde{x} = -0.3$ и $\bar{x} = 1.3$.

29. Функция задана таблицей своих значений

x	0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4	2.7	3.0
y	0.1	0.9	1.7	2.2	1.6	0.8	0.1	0.0	0.5	1.4	2.5

Найдите ее значение в указанной точке и оцените погрешность.

- a) В точке $\tilde{x} = 0.2$, интерполяция многочленом 1-й степени.
 b) В точке $\tilde{x} = 0.2$, интерполяция многочленом 2-й степени.
 c) В точке $\tilde{x} = 0.2$, интерполяция многочленом 3-й степени.
 d) В точке $\tilde{x} = 1.6$, интерполяция многочленом 2-й степени.
 e) В точке $\tilde{x} = 1.6$, интерполяция многочленом 3-й степени.

30. Какой точности интерполяции можно достичь, если использовать в предыдущей задаче все точки при построении интерполяционного многочлена?
31. По известным значениям $\sqrt{9} = 3$ и $\sqrt{4} = 2$ найдите значение $\sqrt{5}$, используя интерполяцию многочленом первой, а затем второй степени (добавив значение $\sqrt{1} = 1$). Выполните теоретические оценки погрешности обоих результатов.
32. Для функции, заданной таблицей значений $y_i = x_i = \frac{i}{4}$, $i = 0 \dots 100$, постройте интерполяционный многочлен 100-й степени.
33. Оцените погрешность глобальной линейной интерполяции функции
- а) $\ln x$ на отрезке $[1, 2]$; б) 2^x на отрезке $[0, 1]$;
 в) \sqrt{x} на отрезке $[1, 2]$; д) \sqrt{x} на отрезке $[100, 101]$;
34. Оцените погрешность интерполяции функций из предыдущей задачи многочленами 4-й степени (по равномерной таблице значений на всем отрезке).
35. С каким постоянным шагом h нужно составлять таблицу функции $\sin x$ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, чтобы погрешность кусочно-линейной интерполяции (между любыми двумя узлами таблицы) не превосходила 10^{-5} ?
36. Функция $f(x) = \frac{1}{A^2 - x}$ приближается на отрезке $[-4, -1]$ многочленом Лагранжа по узлам $x_i = -4, -3, -2, -1$. При каких значениях параметра A погрешность интерполяции не будет превосходить 10^{-5} ?
37. Функция $f(x) = e^{x+A}$ приближается на отрезке $[-1, 0]$ многочленом Лагранжа по узлам $x_i = -1, -0.5, 0$. При каких значениях параметра A погрешность интерполяции не будет превосходить 10^{-6} ?

38. Функция $f(x) = \ln(x + C)$ приближается на отрезке $[1, 3]$ многочленом Лагранжа по узлам $x_i = 1, 2, 3$. При каких значениях C погрешность интерполяции не будет превосходить 10^{-4} ?
39. Пусть таблица значений, задающая функцию $y = f(x)$ такова, что $y_i = C$ ($i = \overline{0, n}$). Проверьте явным построением, что в этом случае интерполяционный многочлен будет иметь вид $P_n(x) = C$ при любом значении $n \geq 1$.
40. Пусть таблица значений, задающая функцию $y = f(x)$ такова, что $y_i = x_i^2$ ($i = \overline{0, n}$). Проверьте явным построением, что в этом случае интерполяционный многочлен будет иметь вид $P_n(x) = x^2$ при любом значении $n \geq 1$.
41. Можно ли обобщить результаты предыдущих задач на случай произвольной степени k , т.е. таблицы вида $y_i = x_i^k$ ($i = \overline{0, n}$)?
42. Функция $f(x) = 2x + x^2 - 3$ интерполируется многочленом Лагранжа степени $n = 2$ с шагом $h = 0.2$ на отрезке $[1.0; 1.6]$. Оцените погрешность интерполяции.
43. Сколько необходимо дополнительных условий для построения кубического сплайна дефекта 1 по четырем точкам?
44. Сколько необходимо дополнительных условий для построения кубического сплайна дефекта 1 по n точкам?
45. Сколько необходимо дополнительных условий для построения параболического сплайна дефекта 1 по четырем точкам?
46. Сколько необходимо дополнительных условий для построения параболического сплайна дефекта 1 по n точкам?
47. Сколько необходимо дополнительных условий для построения кубического сплайна дефекта 2 по четырем точкам?
48. Сколько необходимо дополнительных условий для построения кубического сплайна дефекта 2 по n точкам?
49. По таблице значений функции

x	0	1	2
y	3	3	1

 постройте параболический сплайн с указанным дополнительным условием.
- а) $S'(0) = 0$; б) $S'(2) = 2$; в) $S''(0) = 2$;
 д) условие отсутствия узла.

Численное дифференцирование

Материал по данной теме содержится в [1, глава 12]. Примеры решения задач можно найти в [3].

1. Можно ли получить формулы численного дифференцирования первого порядка точности, дифференцируя многочлен Лагранжа?
2. Существует ли способ выбора оптимального шага при численном дифференцировании?
3. Можно ли получить априорную оценку погрешности формулы численного дифференцирования? (Если да, то как это сделать. Если нет, то почему).
4. Пусть функция задана таблицей с переменным шагом. Можно ли построить формулы численного дифференцирования для такой функции?
5. Можно ли построить формулу численного дифференцирования для вычисления производной n -го порядка с заданным порядком аппроксимации p ?
6. Всегда ли при уменьшении шага дифференцирования погрешность вычисления уменьшается?
7. Каков будет порядок точности формулы численного дифференцирования для функции $f'(x) + f''(x)$, если $f'(x)$ аппроксимирована правой разностной производной, а $f''(x)$ аппроксимирована со вторым порядком точности?

* * *

8. Вычислите приближенные значения производных следующих функций в точке $\tilde{x}=1.5$, используя левую, правую или центральную производную с шагом $h=0.1$. Запишите результат со всеми верными цифрами. Сравните его с точным значением.

a) $f(x) = (x-1)^2$; b); $f(x) = \frac{x}{1+x}$; c) $f(x) = \cos x$;

d) $f(x) = \cos(x^2)$; e) $f(x) = e^{x+5}$; f) $f(x) = e^{x-5}$.

9. Функция $f(x)$ задана таблицей своих значений
- | | | | | |
|--------|---|-----|---|---|
| x | 1 | 1.5 | 2 | 3 |
| $f(x)$ | 1 | 2 | 0 | 1 |
- . Составьте таблицу значений производной $f'(x)$ этой функции в тех же точках. Что можно сказать о точности полученных значений?

10. Функция $f(x)$ задана таблицей своих значений

x	0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1	2.4	2.7	3.0
y	0.1	0.9	1.7	2.2	1.6	0.8	0.1	0.0	0.5	1.4	2.5

Найдите значение ее производных с указанным порядком точности.

- $f'(1.2)$ с 1-ым порядком точности;
 - $f'(1.0)$ со 2-ым порядком точности;
 - $f'(1.0)$ с 3-им порядком точности;
 - $f''(2.0)$ со 2-ым порядком точности;
 - $f'''(1.5)$ с 1-ым порядком точности.
11. Производную какого наиболее высокого порядка $f^{(k)}(0)$ можно получить, используя таблицу значений из предыдущей задачи? Можно ли оценить точность полученного значения?
12. С каким шагом h нужно вычислять значение $\left(\ln \frac{x}{x+1}\right)'$ в точке $\tilde{x}=1$ по указанной формуле, чтобы получить четыре верные цифры в дробной части.
- по формуле левой разностной производной;
 - по формуле центральной разностной производной.
13. Определите порядок аппроксимации следующих формул численного дифференцирования
- $f'(x) \approx \frac{8.8 f(x+h) - 16.5 f(x) + 7.7 f(x-h)}{h}$;
 - $f'(x) \approx \frac{6.6 f(x+h) - 12.2 f(x) + 5.6 f(x-h)}{h}$;
 - $f''(x) \approx \frac{1.8 f(x+h) - 4.5 f(x) + 2.7 f(x-h)}{h^2}$.
14. Постройте аппроксимацию $f'(0)$ наиболее высокого порядка точности следующего вида
- $\frac{a f(0) + b f(h) + c f(2h)}{h}$;
 - $\frac{a f(-h) + b f(0) + c f(h)}{h}$;
15. Предложите формулу приближенного вычисления третьей производной функции. По возможности, укажите порядок ее точности.

Численное интегрирование

Материал по данной теме содержится в [1, глава 13]. Примеры решения задач можно найти в [3].

1. Существует ли связь между какими-либо квадратурными формулами и геометрическим смыслом определенного интеграла?
2. Существует ли связь между какими-либо квадратурными формулами и формулой Ньютона – Лейбница?
3. Чем составная квадратурная формула отличается от элементарной?
4. Чем формула второго порядка точности лучше или хуже формулы первого порядка? (Приведите также пример в числах.)
5. Можно ли применять квадратурные формулы, если интегрируемая функция задана таблицей своих значений?
6. Можно ли дать априорную оценку погрешности, если интегрируемая функция задана таблицей своих значений?
7. Приводит ли увеличение количества узлов в квадратурной сумме к увеличению точности интегрирования?
8. Можно ли применять квадратурную формулу, если функция не обладает необходимой для априорной оценки гладкостью?
9. Как можно получить информацию о погрешности численного интегрирования, пользуясь только заданной квадратурной формулой?
10. Приведите пример функции, интегрирование которой по квадратурной формуле трапеций не будет давать погрешности. Ответ обоснуйте.
11. Приведите пример функции, интегрирование которой по квадратурной формуле центральных прямоугольников не будет давать погрешности. Ответ обоснуйте.
12. Почему из правила Рунге (оценки погрешности) можно вывести способ уточнения квадратурной суммы, а из априорной оценки нельзя?

* * *

13. Вычислите приближенно с шагом $h=1$ интеграл $\int_{-1}^2 \frac{dx}{2+x}$ по указанной квадратурной формуле и дайте априорную оценку погрешности.

а) правых прямоугольников, б) левых прямоугольников,

- с) трапеций, d) Симпсона,
е) центральных прямоугольников.

14. Функция задана таблицей значений

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4
$f(x)$	1	1.2	1.24	0.76	0.6

Вычислите интеграл $\int_1^7 f(x) dx$ по

указанной квадратурной формуле.

- а) правых прямоугольников,
б) левых прямоугольников,
с) центральных прямоугольников,
д) трапеций,
е) Симпсона.

15. Функция задана таблицей значений

x	1	2	3	6	9	11	13
$f(x)$	2	1	3	0	1	0	3

Вычислите

интеграл $\int_1^{13} f(x) dx$ по указанной квадратурной формуле.

- а) правых прямоугольников,
б) левых прямоугольников,
с) центральных прямоугольников,
д) трапеций,
е) Симпсона.

16. Функция $f(x)$ задана таблицей

x	-2	1	6	7
$f(x)$	12	-4	9	1

Вычислите

$\int_{-2}^7 f(x) dx$ по квадратурной формуле второго порядка точности.

17. Функция задана таблицей значений

x	1	1.5	2	2.5	3
$f(x)$	5	4.2	3.8	3.6	3.5

Вычислите интеграл $\int_1^3 f(x) dx$ по формуле трапеций и оцените погрешность результата по правилу Рунге.

18. Вычислите приближенно с шагом $h=1$ интеграл $\int_2^4 (x^2 - 1) dx$ по формуле Симпсона и оцените погрешность результата по правилу Рунге.
19. Найдите погрешность интегрирования функции $f(x) = -x^2 + 2x$ по формуле центральных прямоугольников на отрезке $[0, 5]$ с шагом $h=5$.
20. Найдите погрешность интегрирования функции $f(x) = x^2 + 2x - 3$ по формуле Симпсона на отрезке $[-10, 0]$ с шагом $h=10$.
21. Убедитесь в том, что формулы трапеций и центральных прямоугольников точны для многочленов нулевой и первой степени, а формула Симпсона – для многочленов с нулевой по третью степень включительно.
22. Оцените теоретически значение шага интегрирования h для приближенного вычисления следующих интегралов по формуле трапеций с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.
- а) $\int_0^1 \frac{dx}{x+1}$; б) $\int_{-3}^0 e^x dx$; в) $\int_0^1 \sin(x^2) dx$; г) $\int_0^5 (x-5) dx$.
23. Оцените теоретически значение шага интегрирования h для приближенного вычисления следующих интегралов по формуле Симпсона с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.
- а) $\int_0^1 \frac{x dx}{x+1}$; б) $\int_{-3}^0 x e^x dx$; в) $\int_0^1 \sin(x^2) dx$; г) $\int_0^3 (x^2 + 3x - 1) dx$.
24. Выведите квадратурные формулы центральных прямоугольников и трапеций из общей формулы интерполяционного типа.
25. Убедитесь в том, что квадратурная формула Гаусса с одним узлом точна для многочленов $1, t, t^2, t^3$.
26. Для многочленов какой степени будет точна квадратурная формула Гаусса с 5-ю узлами?
27. Укажите узлы и веса квадратурной формулы Гаусса с двумя узлами на отрезке
- а) $[0, 2]$; б) $[-2, 2]$; в) $[0, 1]$; г) $[1, 4]$.

28. Используя понятие точности на многочленах, постройте квадратурную формулу следующего вида и укажите ее алгебраический порядок точности.

$$\text{a) } \int_0^2 f(x) dx \approx Af(0) + Bf(1);$$

$$\text{b) } \int_{-1}^1 f(x) dx \approx Af(1) + Bf(0) + Cf(1);$$

$$\text{c) } \int_{-1}^1 f(x) dx \approx f(0) + Bf(x_1)$$

$$\text{d) } \int_0^2 f(x) dx \approx f(x_1) + f(x_2)$$

29. Пусть подынтегральная функция монотонно возрастает на отрезке интегрирования. Докажите (геометрически и аналитически), что формула левых прямоугольников даст значение, меньшее точного значения интеграла.
30. Пусть подынтегральная функция на отрезке интегрирования выпукла (вниз). Докажите (геометрически и аналитически), что формула трапеций даст значение, большее точного значения интеграла.
31. Пусть подынтегральная функция монотонно возрастает на отрезке интегрирования и выпукла (вниз) на нем. Докажите (геометрически и аналитически), что формула центральных прямоугольников даст значение, меньшее точного значения интеграла. Можно ли убрать одно из условий на подынтегральную функцию?
32. Постройте «новую» квадратурную формулу на основе формулы левых прямоугольников с уточнением по Рунге. Можно ли определить порядок точности полученной формулы?
33. Постройте «новую» квадратурную формулу на основе формулы правых прямоугольников с уточнением по Рунге. Можно ли определить порядок точности полученной формулы?
34. Постройте «новую» квадратурную формулу на основе формулы трапеций с уточнением по Рунге. Можно ли определить порядок точности полученной формулы?

Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

Материал по данной теме содержится в [1, глава 14]. Примеры решения задач можно найти в [4].

1. Объясните, чем постановка дискретной задачи Коши отличается от дифференциальной?
2. Объясните, чем отличаются явные и неявные численные методы решения задачи Коши для ОДУ 1 порядка? Приведите примеры.
3. Объясните, чем отличаются одношаговые и многошаговые численные методы решения задачи Коши для ОДУ 1 порядка.
4. Чего больше – сходства или различий – в проблемах старта многошаговых методов решения задачи Коши и многошаговых методов поиска корня функции?
5. Верно ли утверждение, что погрешность численного решения задачи Коши совпадает с погрешностью аппроксимации метода?
6. Правило Рунге практической оценки погрешности для задачи Коши формально совпадает с правилом Рунге для квадратурных формул. Означает ли это, что в обоих случаях они основаны на однотипных свойствах методов?
7. Можно ли неявный метод превратить в явный? Что можно приобрести или потерять при таком превращении?
8. Верно ли, что устойчивый многошаговый метод решения задачи Коши k -го порядка аппроксимации даст приближенное решение с погрешностью Ch^k ?
9. Верно ли, что неявный метод Эйлера точнее, чем явный метод Эйлера?
10. В каком семействе методов – Адамса или Рунге-Кутты – можно построить метод 20-го порядка точности? Если можно, то как это сделать?
11. Могут ли совпадать расчетные формулы метода Тейлора некоторого порядка точности p с расчетными формулами Рунге-Кутты того же порядка?
12. Почему явный метод Адамса-Башфорта называют экстраполяционным?
13. Можно ли применять при решении задачи Коши методом Адамса правило Рунге оценки погрешности?

14. Каков геометрический смысл усовершенствованного метода Эйлера и метода Эйлера-Коши?
15. Верно ли утверждение, что из устойчивости численного метода решения задачи Коши вытекает нуль-устойчивость метода?
16. Является ли выполнение корневого условия достаточным условием для доказательства нуль-устойчивости метода?
* * *
17. Найдите решение задачи Коши явным методом Эйлера с шагом $h = 0.2$. Изобразите эскиз графика. Оцените погрешность по правилу Рунге.
 - а) $\begin{cases} y' = \frac{y}{t} - t^2, \\ y(1) = -1 \end{cases}$ на отрезке $[1, 3]$; б) $\begin{cases} y' = y - t, \\ y(0) = 2 \end{cases}$ на отрезке $[0, 2]$;
 - с) $\begin{cases} y' = \frac{t+1}{y}, \\ y(-1) = 4 \end{cases}$ на отрезке $[-1, 1]$.
18. Запишите расчетные формулы метода Эйлера-Коши для решения задачи $\begin{cases} y' = \sin(t + y), \\ y(0) = 1. \end{cases}$ Найдите с их помощью решение в точках $t_1 = 1.0$, $t_2 = 1.5$ за минимально возможное количество шагов.
19. Запишите расчетные формулы усовершенствованного метода Эйлера для решения задачи $\begin{cases} y' = t \sin(y), \\ y(0) = 1. \end{cases}$ Найдите с их помощью решение в точках $t_1 = 0.3$, $t_2 = 0.4$ за минимально возможное количество шагов.
20. Запишите расчетные формулы неявного метода Эйлера для решения задачи $\begin{cases} y' = (t+1)y + t^2, \\ y(0) = 1. \end{cases}$ Найдите с их помощью решение в точках $t_1 = 0.05$, $t_2 = 0.2$ за минимально возможное количество шагов.
21. Методом разложения в ряд Тейлора получите расчетные формулы численного метода 5-го порядка точности для решения задачи Коши

$$\text{a) } \begin{cases} y' = \frac{y}{t}, \\ y(1) = 1; \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} y' = \frac{y}{t} + 1, \\ y(1) = 1; \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} y' = y + t, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

22. Определите порядок аппроксимации метода $\frac{3y_n - 4y_{n-1} + y_{n-2}}{2h} = f_n$ решения задачи Коши $\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$

Является ли этот метод нуль-устойчивым?

23. Определите порядок аппроксимации метода $\frac{y_n - y_{n-3}}{3h} = f_{n-1}$ решения задачи Коши $\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$ Является ли этот метод нуль-устойчивым?

24. Пусть задача Коши $\begin{cases} u' = -u, \\ v' = -u - 19v, \\ u(0) = 2, \quad v(0) = 5. \end{cases}$ решается явным методом

Эйлера. При каком шаге метод будет устойчив? Можно ли считать задачу жесткой?

25. Сделайте 2 шага длины 0.1 по явному и по неявному методам Эйлера для решения задачи Коши $\begin{cases} u' = -3u + v, \\ v' = 6u + 2v, \\ u(0) = 0, \quad v(0) = 3.5 \end{cases}$

26. Замените задачу Коши для уравнения 2-го порядка $\begin{cases} 5y'' - (y')^2 + e^{yt} = t, \\ y(1) = 0, y'(1) = 2. \end{cases}$ системой уравнений 1-го порядка.

27. Запишите расчетные формулы метода Эйлера-Коши и усовершенствованного метода Эйлера для системы уравнений, полученной в предыдущей задаче.

Численное решение краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений

Материал по данной теме содержится в [1, глава 15]. Примеры решения задач можно найти в [4].

1. Что представляет собой разностная схема?
2. Может ли решение, полученное по разностной схеме, быть точным?
3. Что означает сходимость разностной схемы?
4. Всегда ли приближенное решение, полученное по разностной схеме, при уменьшении длины шага будет стремиться к точному решению?
5. Верно ли утверждение, что погрешность решения задачи совпадает с погрешностью аппроксимации задачи?
6. Влияет ли погрешность аппроксимации граничных условий на порядок сходимости разностной схемы?
7. Может ли граничное условие в разностной схеме быть аппроксимировано без погрешности?
8. В чем отличие метода конечных разностей для случая переменного коэффициента теплопроводности по сравнению с постоянным коэффициентом?
9. Пусть коэффициенты уравнения $-(k(x)u')' + q(x)u = f(x)$, $x \in (a, b)$ таковы, что $k(x) \in C^4[a, b]$, $q(x) \in C^3[a, b]$, $f(x) \in C^4[a, b]$. Какую гладкость будет иметь решение краевой задачи (с граничными условиями первого рода)?
10. Почему метод называется методом конечных разностей?
* * *
11. Является ли функция $u(x) = x^2 + 4x + 5$ решением краевой задачи
$$\begin{cases} u'' - 2u' + u = x^2 - 1, \\ u(0) = 5, u(1) = 10 \end{cases}?$$
12. Методом конечных разностей найдите с шагом $h = 0.2$ решение краевой задачи
$$\begin{cases} u'' - 5u = 10x, \\ u(0) = 0, u(0.6) = -1.2. \end{cases}$$

13. Методом конечных разностей найдите с шагом $h=0.2$ решение краевой задачи и оцените его погрешность по правилу Рунге

$$\begin{cases} -u'' + 5xu = 10x^2, \\ u(0) = 0, u(0.8) = 1.6. \end{cases}$$

14. Методом конечных разностей найдите с шагом $h=0.25$ решение краевой задачи и оцените его погрешность по правилу Рунге

$$\begin{cases} -u'' + 2u = 2x^2, \\ u(0) = 1, u(1) = 2. \end{cases}$$

15. Методом конечных разностей найдите с шагом $h=0.25$ решение краевой задачи и оцените его погрешность по правилу Рунге

$$\begin{cases} -u'' + 2u = 2x^2, \\ u'(0) = 0, u(1) = 2. \end{cases}$$

16. Составьте разностную схему второго порядка точности для решения краевой задачи

$$\begin{cases} u'' - \frac{1}{x}u' + \frac{1}{x^2}u = 1, \\ u(1) = 1, u(5) = 3. \end{cases}$$

17. Аппроксимирует ли разностная схема

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = f_i + \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{12}$$

первое уравнение краевой задачи $\begin{cases} u'' = f \\ u(a) = u_a, u(b) = u_b \end{cases} ?$

18. Вычислите значение $(x^2 u')'$ в точке $\tilde{x}=1$ со вторым порядком

точности, пользуясь таблицей значений $\frac{x}{u} \begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 & 3 \end{array}.$

19. Составьте разностную схему для решения краевой задачи:

$$\begin{cases} (\cos(x)u')' - xu = x^3 \\ u(0) = 0, u(1) = 0. \end{cases}$$

Литература

1. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы. М: Издательский дом МЭИ, 2008.
2. Казенкин К.О. Указания к решению задач по вычислительной математике. Теория погрешностей. Нелинейные уравнения. Системы линейных алгебраических уравнений. М: Издательство МЭИ. 2009.
3. Казенкин К.О. Указания к решению задач по вычислительной математике. Приближение функций. Численное интегрирование. Численное дифференцирование. М: Издательство МЭИ. 2011.
4. Казенкин К.О. Указания к решению задач по вычислительной математике. Численное решение задачи Коши. Численное решение двухточечной краевой задачи. М: Издательство МЭИ. 2014.

Оглавление

Предисловие.....	3
Основы теории погрешности.....	4
Решение нелинейных уравнений.....	8
Решение систем линейных алгебраических уравнений.....	11
Приближение функций.....	16
Численное дифференцирование.....	21
Численное интегрирование.....	23
Численное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений.....	27
Численное решение краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений.....	30
Литература.....	32